

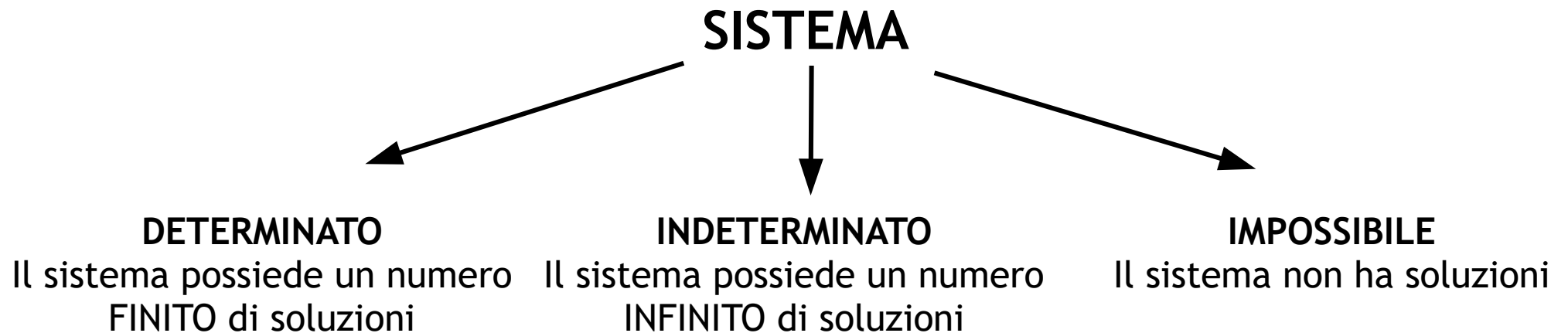
# Analisi matematica

## Sistemi lineari - Definizioni

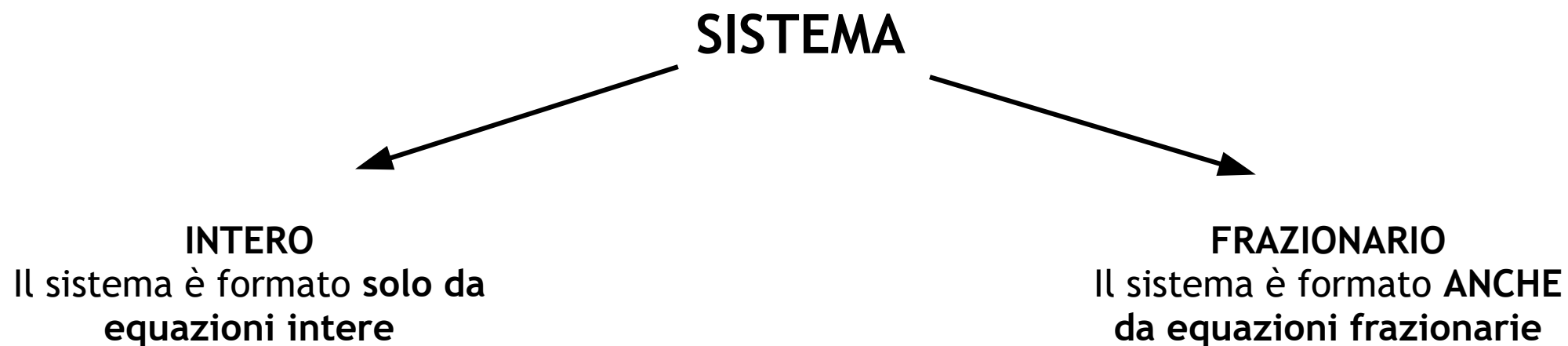
## Cos'è un sistema?

- **Sistema di equazioni:** insieme di due o più equazioni nelle stesse incognite, le quali si desidera siano soddisfatte contemporaneamente
- **Soluzione di un sistema di due equazioni in due incognite:** coppia ordinata di numeri reali che soddisfa entrambe le equazioni del sistema

## Come può essere un sistema?



## Come può essere un sistema?



### Ricorda!

- Il **GRADO DI UN SISTEMA INTERO** è il prodotto dei gradi delle sue equazioni
- **SISTEMA LINEARE**  $\longleftrightarrow$  **SISTEMA DI PRIMO GRADO**

## INTERPRETAZIONE GRAFICA DI UN SISTEMA LINEARE

Ogni sistema lineare formato da due equazioni può essere ridotto in forma normale

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Dove le due equazioni rappresentano due rette nel piano cartesiano.

Disegnando tali rette, solo UNA di queste tre possibilità può verificarsi:

- **RETTE INCIDENTI**  $\Rightarrow$  **SISTEMA DETERMINATO**: la soluzione è data dalle coordinate del punto di intersezione
- **RETTE PARALLELE**  $\Rightarrow$  **SISTEMA IMPOSSIBILE**: non sono presenti punti in comune, dunque non ci sono soluzioni
- **RETTE COINCIDENTI**  $\Rightarrow$  **SISTEMA INDETERMINATO**: tutti gli infiniti punti delle rette sono in comune, quindi ci sono infinite soluzioni

## I METODI

I seguenti sono i metodi utilizzati per risolvere i sistemi:

- **METODO DI SOSTITUZIONE**
- **METODO DEL CONFRONTO**
- **METODO DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE**
- **METODO DI CRAMER**

## METODO DI SOSTITUZIONE

Si utilizza il metodo di sostituzione ogni volta che è possibile ricavare da un'equazione del sistema un'incognita in funzione dell'altra.

### PROCEDURA:

- 1) Risolvere una delle equazioni rispetto ad un'altra incognita (considerando l'altra una costante);
- 2) Sostituire l'espressione trovata nell'altra equazione, ottenendo un'equazione (RISOLVENTE) in un'unica incognita;
- 3) Risolvere l'equazione risolvente, trovando il valore dell'incognita;
- 4) Sostituire il valore appena trovato, nell'altra equazione, trovando così il valore della seconda incognita;
- 5) Scrivere la soluzione del sistema.

Se l'equazione risolvente è impossibile, il sistema è impossibile. Analogamente, se l'equazione risolvente è indeterminata, il sistema è indeterminato.

## METODO DEL CONFRONTO

### PROCEDURA:

- 1) Risolvere entrambe le equazioni rispetto alla stessa incognita;
- 2) Eguagliare le espressioni trovate;
- 3) Risolvere l'equazione ottenuta (RISOLVENTE), trovando il valore di un'incognita;
- 4) Sostituire il valore trovato in una delle due equazioni iniziali, trovando così il valore della seconda incognita;
- 5) Scrivere la soluzione del sistema.



## METODO DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Utilizzato per risolvere sistemi ridotti in forma normale, in cui una delle due incognite compare con lo stesso coefficiente in valore assoluto.

### PROCEDURA:

- 1) Fare in modo che un'incognita abbia lo stesso coefficiente (in valore assoluto) in entrambe le equazioni;
- 2) Eseguire la somma (se i segni sono opposti) o la differenza (se i segni sono concordi) tra le due equazioni, trovando l'equazione RISOLVENTE;
- 3) Risolvere l'equazione RISOLVENTE, trovando il valore di un'incognita;
- 4) Sostituire il valore trovato in una delle due equazioni iniziali, trovando così il valore della seconda incognita;
- 5) Scrivere la soluzione del sistema.

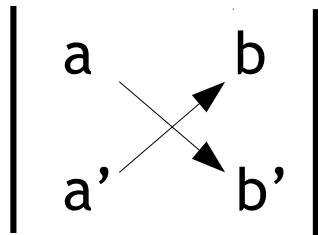
## METODO DI CRAMER

PREMESSA: Siano  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$  numeri disposti in una tabella siffatta:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$$

MATRICE 2x2

DETERMINANTE  
DELLA MATRICE  
2x2


$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

$$= ab' - a'b$$

Dato un sistema di equazioni ridotte in forma normale:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

$$Dx = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$$

$$Dy = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = cb' - c'b$$

Si può verificare UNA tra le tre possibilità:

- $D \neq 0 \Rightarrow$  **SISTEMA DETERMINATO**:  $x = Dx : D$  ,  $y = Dy : D$
- $D = 0, Dx \neq 0 \vee Dy \neq 0 \Rightarrow$  **SISTEMA IMPOSSIBILE**
- $D = Dx = Dy \Rightarrow$  **SISTEMA INDETERMINATO**

## SISTEMI LINEARI LETTERALI

Quando un sistema dipende da un parametro (lettera), l'esistenza e il numero delle soluzioni dipendono dai valori assunti dal parametro.

Quindi, oltre a risolvere il sistema (con i metodi appresi), è necessario **DISCUTERLO**, cioè stabilire per quali valori del parametro il sistema risulta **DETERMINATO**, **INDETERMINATO** o **IMPOSSIBILE**.

## RISOLUZIONE E DISCUSSIONE DI UN SISTEMA LINEARE LETTERALE

### PROCEDURA:

- 1) Ridurre le equazioni in forma normale;
- 2) Con il METODO DI CRAMER calcolare i tre determinanti  $D$ ,  $D_x$ ,  $D_y$ ;
- 3) Porre  $D \neq 0$  e trovare i valori del parametro che soddisfano la condizione del sistema (SISTEMA DETERMINATO), quindi calcolare le soluzioni (le quali saranno in funzione del parametro);
- 4) Esaminare i valori esclusi al punto precedente: in questi casi il sistema è INDETERMINATO o IMPOSSIBILE;
- 5) Riassumere i risultati della discussione

## SISTEMI LINEARI DI TRE EQUAZIONI IN TRE INCOGNITE

Per risolvere questo tipo di sistema si usa una combinazione dei metodi di sostituzione, addizione&sottrazione e confronto.

### PROCEDURA:

- 1) Risolvere un'equazione rispetto ad un'altra incognita;
- 2) Sostituire il valore nelle altre due, andando a costituire un sotto-sistema di due equazioni in due incognite;
- 3) Risolvere il sotto-sistema con un dei metodi appresi;;
- 4) Sostituire i valori trovati in una delle equazioni iniziali, trovando così il valore della terza incognita;
- 5) Scrivere la soluzione del sistema