studentitalia

Analisi matematica

Sistemi lineari - Definizioni

Cos’è un sistema?

- **Sistema di equazioni:** insieme di due o più equazioni nelle stesse incognite, le quali si desidera siano soddisfatte contemporaneamente

- **Soluzione di un sistema di due equazioni in due incognite:** coppia ordinata di numeri reali che soddisfa entrambe le equazioni del sistema

Come può essere un sistema?

SISTEMA

DETERMINATO
Il sistema possiede un numero FINITO di soluzioni

INDETERMINATO
Il sistema possiede un numero INFINITO di soluzioni

IMPOSSIBILE
Il sistema non ha soluzioni

Come può essere un sistema?

SISTEMA

INTERO
Il sistema è formato **solo da equazioni intere**

FRAZIONARIO
Il sistema è formato **ANCHE da equazioni frazionarie**

Ricorda!

- Il **GRADO DI UN SISTEMA INTERO** è il prodotto dei gradi delle sue equazioni
- SISTEMA LINEARE $\longleftrightarrow$ SISTEMA DI PRIMO GRADO

INTERPRETAZIONE GRAFICA DI UN SISTEMA LINEARE

Ogni sistema lineare formato da due equazioni può essere ridotto in forma normale

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Dove le due equazioni rappresentano due rette nel piano cartesiano.
Disegnando tali rette, solo UNA di queste tre possibilità può verificarsi:

- **RETTE INCIDENTI** ⇒ **SISTEMA DETERMINATO:** la soluzione è data dalle coordinate del punto di intersezione
- **RETTE PARALLELE** ⇒ **SISTEMA IMPOSSIBILE:** non sono presenti punti in comune, dunque non ci sono soluzioni
- **RETTE COINCIDENTI** ⇒ **SISTEMA INDETERMINATO:** tutti gli infiniti punti delle rette sono in comune, quindi ci sono infinite soluzioni

I METODI

I seguenti sono i metodi utilizzati per risolvere i sistemi:

- **METODO DI SOSTITUZIONE**
- **METODO DEL CONFRONTO**
- **METODO DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE**
- **METODO DI CRAMER**

METODO DI SOSTITUZIONE

Si utilizza il metodo di sostituzione ogni volta che è possibile ricavare da un'equazione del sistema un'incognita in funzione dell'altra.

PROCEDURA:

1) Risolvere una delle equazioni rispetto ad un'altra incognita (considerando l'altra una costante);

2) Sostituire l'espressione trovata nell'altra equazione, ottenendo un'equazione (RISOLVENTE) in un'unica incognita;

3) Risolvere l'equazione risolvente, trovando il valore dell'incognita;

4) Sostituire il valore appena trovato, nell'altra equazione, trovando così il valore della seconda incognita;

5) Scrivere la soluzione del sistema.

Se l'equazione risolvente è impossibile, il sistema è impossibile. Analogamente, se l'equazione risolvente è indeterminata, il sistema è indeterminato.

studentitalia

METODO DEL CONFRONTO

PROCEDURA:

1) Risolvere entrambe le equazioni rispetto alla stessa incognita;

2) Eguagliare le espressioni trovate;

3) Risolvere l'equazione ottenuta (RISOLVENTE), trovando il valore di un'incognita;

4) Sostituire il valore trovato in una delle due equazioni iniziali, trovando così il valore della seconda incognita;

5) Scrivere la soluzione del sistema.

METODO DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Utilizzato per risolvere sistemi ridotti in forma normale, in cui una delle due incognite compare con lo stesso coefficiente in valore assoluto.

PROCEDURA:

1) Fare in modo che un'incognita abbia lo stesso coefficiente (in valore assoluto) in entrambe le equazioni;

2) Eseguire la somma (se i segni sono opposti) o la differenza (se i segni sono concordi) tra le due equazioni, trovando l'equazione RISOLVENTE;

3) Risolvere l'equazione RISOLVENTE, trovando il valore di un'incognita;

4) Sostituire il valore trovato in una delle due equazioni iniziali, trovando così il valore della seconda incognita;

5) Scrivere la soluzione del sistema.

METODO DI CRAMER

PREMESSA: Siano a, a’, b, b’ numeri disposti in una tabella siffatta:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$$

MATRICE 2x2

DETERMINANTE DELLA MATRICE 2x2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Dato un sistema di equazioni ridotte in forma normale:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

$$Dx = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$$

$$Dy = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = cb' - c'b$$

Si può verificare UNA tra le tre possibilità:

- $D \neq 0 \Rightarrow$ **SISTEMA DETERMINATO:** $x = Dx : D$, $y = Dy : D$
- $D = 0$, $Dx \neq 0 \lor Dy \neq 0 \Rightarrow$ **SISTEMA IMPOSSIBILE**
- $D = Dx = Dy \Rightarrow$ **SISTEMA INDETERMINATO**

SISTEMI LINEARI LETTERALI

Quando un sistema dipende da un parametro (lettera), l’esistenza e il numero delle soluzioni dipendono dai valori assunti dal parametro.

Quindi, oltre a risolvere il sistema (con i metodi appresi), è necessario DISCUTERLO, cioè stabilire per quali valori del parametro il sistema risulta DETERMINATO, INDETERMINATO o IMPOSSIBILE.

RISOLUZIONE E DISCUSSIONE DI UN SISTEMA LINEARE LETTERALE

PROCEDURA:

1) Ridurre le equazioni in forma normale;

2) Con il METODO DI CRAMER calcolare i tre determinanti D, Dx, Dy;

3) Porre $D \neq 0$ e trovare i valori del parametro che soddisfano la condizione del sistema (SISTEMA DETERMINATO), quindi calcolare le soluzioni (le quali saranno in funzione del parametro);

4) Esaminare i valori esclusi al punto precedente: in questi casi il sistema è INDETERMINATO o IMPOSSIBILE;

5) Riassumere i risultati della discussione

SISTEMI LINEARI DI TRE EQUAZIONI IN TRE INCOGNITE

Per risolvere questo tipo di sistema si usa una combinazione dei metodi di sostituzione, addizione&sottrazione e confronto.

PROCEDURA:

1) Risolvere un'equazione rispetto ad un'altra incognita;

2) Sostituire il valore nelle altre due, andando a costituire un sotto-sistema di due equazioni in due incognite;

3) Risolvere il sotto-sistema con un dei metodi appresi;;

4) Sostituire i valori trovati in una delle equazioni iniziali, trovando così i il valore della terza incognita;

5) Scrivere la soluzione del sistema